Практическое руководство по актуарной математике

Содержание

Введение

АКТУАРИЙ (от лат. actuarius – скорописец, счетовод) - специалист в области страховой математической статистики, занимающийся разработкой научно обоснованных методов исчисления тарифных ставок по долгосрочному страхованию жизни.

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ - система математических и статистических закономерностей, устанавливающих взаимоотношения между страховщиком и страхователем. Они отражают в виде математических формул механизм образования и расходования страхового фонда в долгосрочных страховых операциях, связанных с продолжительностью жизни населения. К ним также относят расчеты тарифов по любому виду страхования, включая страхование от несчастных случаев, имущества, трудоспособности. Методология актуарных расчетов использует теорию вероятностей, данные демографии и долгосрочные статистические данные, финансовые исчисления. При помощи последних в тарифах учитывается доход, который получает страховщик от использования в качестве кредитных ресурсов аккумулированных взносов страхователей[1]

Элементы финансовой математики

Простые и сложные проценты.
Эффективная процентная ставка. Номинальная и реальная доходность.

$$C_1 = C_0 * (1+i)$$

i –процентная ставка

$$C_2 = C_1 * (1+i) = C_0 * (1+i) * (1+i) = C_0 * (1+i)^2$$
$$C_n = C_0 * (1+i)^n, C(t) = C_0 * (1+i)^t$$

Простые проценты	Сложные проценты
$1 + t * i$	$(1+i)^t$

Аппроксимации

$(1+i)^n \approx 1 + n * i$, для малых i и n

$$(1+i)^n \approx 1 + n * i + \frac{n \times (n-1) * i^2}{2}$$

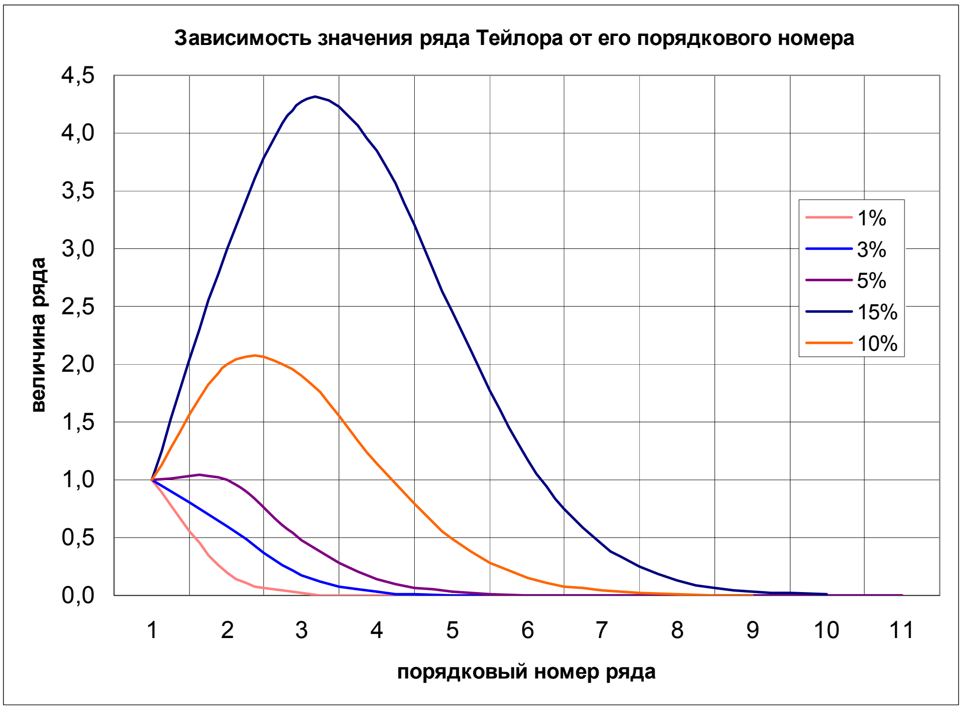
Пример для $n=5$

[1] http://economy.polbu.ru/aktuarnye_raschety.htm

годовая процентная ставка (i)	$(1+i)^n$	$1+n*i$	$1+n*i+\frac{n\times(n-1)*i}{2}$
1	1,051	1,050	1,051
2	1,104	1,100	1,104
3	1,159	1,150	1,159
4	1,217	1,200	1,216
5	1,276	1,250	1,275
6	1,338	1,300	1,336
7	1,403	1,350	1,399
8	1,469	1,400	1,464
9	1,539	1,450	1,531
10	1,611	1,500	1,600

Однако для более высоких степеней *n* и процентных ставок *i*, линеаризация недопустима. На рис. приведены значения ряда Тейлора для n=20 при различных процентных ставках.

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^n * ((1+i)^n)'^n}{k!} = 1 + i*n + \frac{n*(n-1)*i^2}{2} + \frac{n*(n-1)*(n-2)*i^3}{6} + ...$$



Данный пример показывает, что на больших временных интервалах нелинейностью пренебрегать нельзя. Поэтому многие приближение, построенные на линейных приближениях, корректны только на ограниченном временном интервале.

Годовая эффективная процентная ставка. Интенсивность процентов.

$$(1+\frac{i_{эфф}}{m})^m = 1+i$$

$i_{эфф} = m*((1+i)^{1/m} - 1)$

Например, пусть годовая процентная ставка равна 100%. Тогда сумма в размере 1, размещенная под данную ставку будет равна 2 в конце года. В случае если в середине года можно реинвестировать сумму с начисленными процентами получим 1,5*1,5=2,25. Поэтому для того, чтобы в этом случае получить в конце года сумму равную 2 годовая процентная ставка должна быть равна $2*(\sqrt{2}-1) = 0{,}82$, что составляет 82%.

$$\lim(1+\frac{\delta}{m})^m = e^{\delta}$$

$e^{\delta} = (1+i)$, $\delta = \ln(1+i)$ - интенсивность процентов, сила роста.

годовая процентная ставка (i)	эффективная процентная ставка			
	m=2	m=6	m=12	δ (m=∞)
1	0,998	0,996	0,995	0,995
2	1,990	1,984	1,982	1,980
3	2,978	2,963	2,960	2,956
4	3,961	3,935	3,928	3,922
5	4,939	4,899	4,889	4,879
6	5,913	5,855	5,841	5,827
7	6,882	6,804	6,785	6,766
8	7,846	7,746	7,721	7,696
9	8,806	8,680	8,649	8,618
10	9,762	9,607	9,569	9,531

Номинальная и реальная доходность

$$1 + i_{ном} = (1+i_{реал})*(1+\inf l) = 1 + i_{реал} + \inf l + i_{реал} * \inf l$$

infl – уровень инфляции

Формула Фишера

$$i_{ном} = i_{реал} + \inf l$$

Актуарный базис

Процентная ставка

Таблицы смертности

Представляют систематизированный набор статистических данных о продолжительности жизни населения отдельной страны или выделенной ее группы. Группы можно выделить по полу, профессии, региону и т.д.

Существует множество способов представления таблиц смертности. Фрагмент таблицы смертности приведен в таблице.

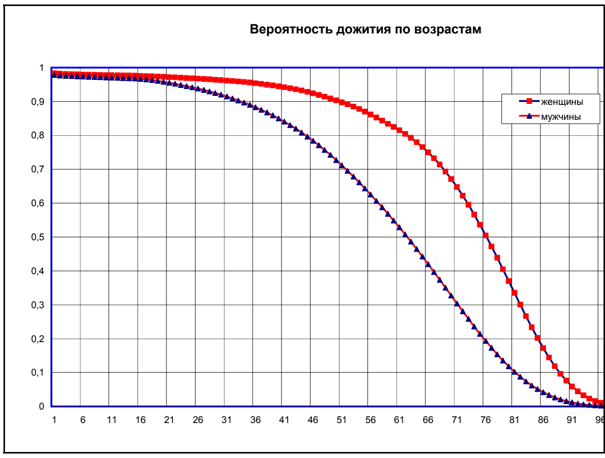
Возраст	Число женщин, доживающих до возраста x	Число мужчин, доживающих до возраста x
0	100 000	100 000
1	99 983	99 979
2	99 966	99 959
3	99 949	99 938
4	99 931	99 918
5	99 914	99 897
6	99 897	99 877
7	99 880	99 856
8	99 863	99 836
9	99 846	99 815
10	99 828	99 795

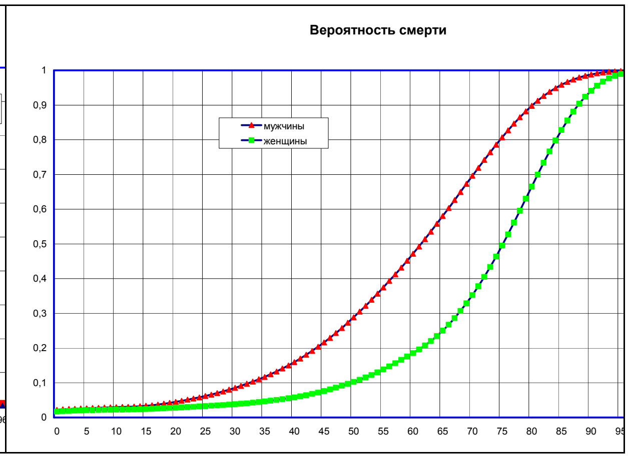
Продолжительность жизни (x) – случайная величина[2] (с.в.).
Обозначим вероятность прожить целое число лет

$$\Pr(X = x) = \Pr(x \le X < X + \Delta x),$$

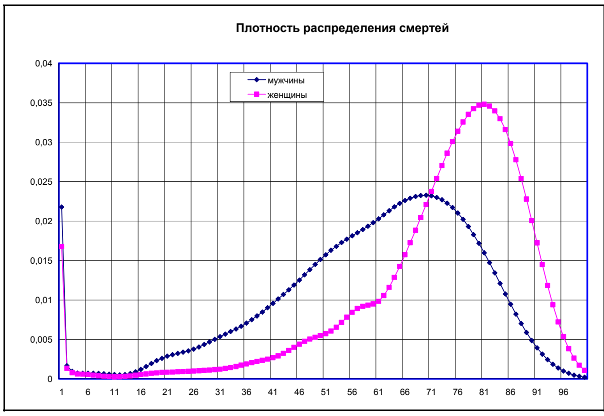
Плотность вероятностей с.в. через f(x), а функцию распределения с.в. через F(x) – распределение времени предстоящей жизни и определяет вероятность смерти с момента рождения до возраста X

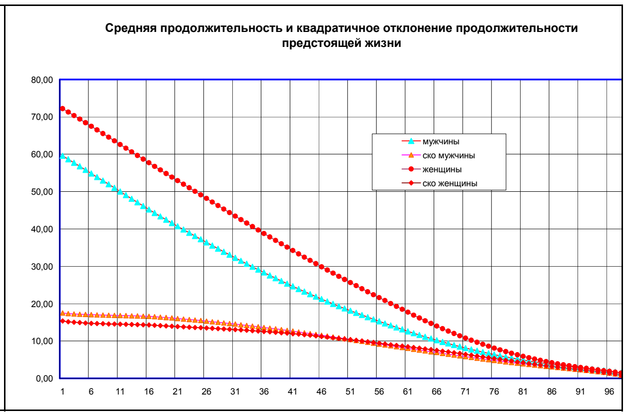
В актуарной математике часто используется функция дожития S(x)=1-F(x) и определяет вероятность дожить с момента рождения до возраста X





[2] Случайная величина – это функция X(ω), заданная на пространстве элементарных событий Ω и измеримая относительно поля событий S. Под измеримостью понимается следующее: для любого $-\infty<x<\infty$ (ω: X(ω)$<$x) Є S. Вероятность с.в. определяется следующим образом P(ω:X(ω)$<$x). Функция распределения вероятности определяет величину вероятности
F(x)=P(ω:X(ω)$<$x))





l_x – число людей, доживших до возраста x
d_x – число людей умерших в интервале x и x+1 лет $d_x=l_x-l_{x+1}$

Вероятность для лица в возрасте x, прожить еще один год равна:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

вероятность умереть в течение года

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} = 1 - p_x$$

вероятность прожить n лет

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \times \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \times .. \times \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = p_x \times p_{x+1} \times .. \times p_{x+n-1}$$

умереть в течение n лет

$$_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{\sum_{j=x}^{x+n-1} d_j}{l_x} = 1 - {_n p_x}$$

прожить n лет и умереть в возрасте n+1

$$_{n/} q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \times (1 - \frac{l_{x+n+1}}{l_{x+n}}) = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

Время ожидаемой продолжительности жизни

$$e_0 = EX = \int_0^\infty x * f(x)dx = -\int_0^\infty x * d(s(x)) = -x * s(x) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx$$

$$e_x = \frac{1}{s(x)} * \sum_{k=1}^{\omega} s(x+k)$$

$$\Pr(X = x) = \Pr(x \le X < X + \Delta x) = {_k p_x} \times q_{x+k}$$

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} x \times \Pr ob(X = x) = \sum_{k=1}^{\infty} x \times {_k p_x} \times q_{x+k}$$

или

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr ob(X \geq x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$$

Интенсивность смертности

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \approx \mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

$$s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_x dx)$$

Модели смертности

Модель Муавра (равномерное распределение жизни 1729)

$$f(x) = \frac{1}{\omega},\ F(x) = \frac{x}{\omega},\ S(x) = 1 - \frac{x}{\omega},\ \mu_x = \frac{1}{\omega - x}, e_0 = \frac{\omega}{2}$$

Модель Гомпертца (1825)

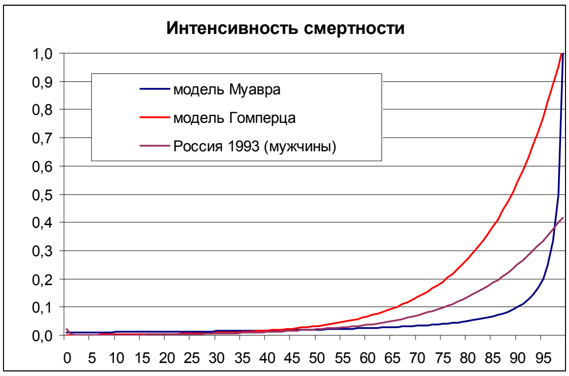
$$\mu_x = B * \exp(\alpha \times x)$$

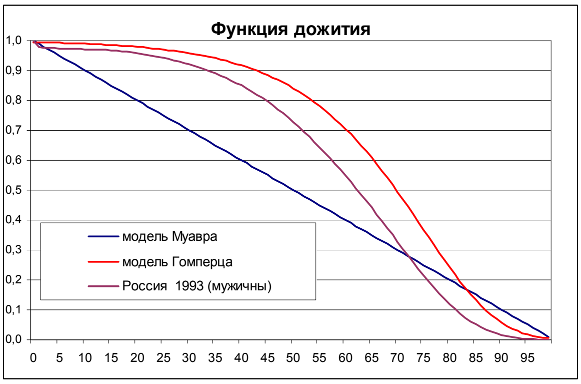
$$\int_0^x B \times \exp(\alpha \times x) dx = \frac{B}{\alpha} * (\exp(\alpha \times x) - 1)$$

$$s(x) = \exp(-\frac{B}{\alpha} * (\exp(\alpha \times x) - 1))$$

Модель Макхейма (1860)

$$\mu_x = A + B * \exp(\alpha \times x)$$





Ожидаемая продолжительность жизни в разных странах

	Год	***Страна***	*Мужчины*			*Женщины*		
			0	**60**	**65**	**0**	**60**	**65**

1	1992	**Великобритания**			14,3			
2	1995	**Индия**	59,5	15	12,2	60,9	17,1	13,9
3		**Индонезия**	72,2	17,7	14,2	76,6	21	17,1
4		**Канада**	74,6	19,4	15,7	80,9	24	20
5	1990	**Нидерланды**	74,2	17,9	14,3	81	23,4	19,2
6		**Польша**	68,5	16,1	13,1	77	20,8	16,8
7	1993	**Россия**	59,3	13,1	10,6	72	18,5	14,7
8	2000	**США**	78,2	22,9	19	83,7	26,6	22,5
9		**Тайланд**	66,4	17,6	14,4	71,6	21,3	17,7
10	1995	**Франция**	73,9	19,7	16,1	81,2	24,9	20,6
11	1995	**Швеция**	76,2	19,8	16	81,5	23,9	19,7
12	1996	**Япония**	77	20,8	16,9	83,6	25,9	21,5

Срочные ренты

Рента – последовательность из n выплат, сделанных в начале или в конце периода.

Современная стоимость ренты – сумма дисконтированных платежей

Дисконтирование - метод оценки современной стоимости суммы, которая будет получена в будущем.

$$\upsilon = \frac{1}{1+i}$$ - дисконтный множитель

i – процентная ставка

Выплата производится в конце периода

$$a_n = \upsilon + \upsilon^2 + .. + \upsilon^n = \upsilon \times \frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon} = \frac{1-\upsilon^n}{i}$$

$$a_\infty = \upsilon + \upsilon^2 + .. + \upsilon^\infty = \frac{1}{i}$$

Выплата производится в конце периода и отложена на m лет

$$_{m|}\, a_n = a_{n+m} - a_m = (\upsilon + \upsilon^2 + .. + \upsilon^{n+m}) - (\upsilon + \upsilon^2 + .. + \upsilon^m) = \upsilon^{m+1} \times \frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon} = \upsilon^m \times a_n$$

Выплата производится в начале периода

$$\ddot{a}_n = 1 + \upsilon + \upsilon^2 + .. + \upsilon^{n-1} = \frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon} = \frac{1-\upsilon^n}{d},\ d = 1-\upsilon$$

$$\ddot{a}_\infty = 1 + \upsilon + \upsilon^2 + .. + \upsilon^\infty = \frac{1}{1-\upsilon} = \frac{1}{d}$$

Техника функциональных уравнений для срочной ренты

Самой простой оценкой, приближающей результаты актуарного расчета является современная стоимость ренты с периодом равным ожидаемой продолжительности жизни. В данной статье предлагается более точная оценка, основанная на применении функциональных уравнений.

Функциональным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная функция связана с известными функциями посредством операции композиции. Функциональное уравнение может быть рассмотрено как разностное уравнение, являющееся дискретным аналогом дифференциального уравнения. В случае моделирования сложных систем функциональные уравнения удобны для определения возможных границ получаемых решений и степени чувствительности системы к различного рода воздействиям. В предельном случае функциональные уравнения переходят в дифференциальные уравнения.

В качестве примера рассмотрим простейшее функциональное уравнение связывающее сумму S, размещенную под процентную ставку (r) в моменты времени (x) и (x+1).

$$S(x+1)=A*S(x), \text{ где } A=1+r$$

Решение данного уравнения имеет вид:

$$S(x)=const*A^x$$

Где значение const определяется из начальных условий.

В случае регулярной единичной выплаты уравнение сводится к виду:

$S(x+1)=A*S(x)-1$

И описывает обыкновенную ренту постнумерандо. Решение имеет вид:

$$S(x)=const*A^x +1/(A-1)$$

Рассчитаем современную стоимость данной ренты. Для этого определим значение const при x=n, где n- число выплат. Очевидно, что современная стоимость будет равна сумме геометрической прогрессии с числом членов n. Проверим, определив значение функции S(x) при x=0. Выразим значение const при условии S(n)=0, $const=-1/[A^n *(A-1)]$, следовательно $S(0)= (1-1/ A^n) / (A-1)$ Сумма геометрической прогрессии равна $a*(1-q^n)/(1-q)$, где знаменатель прогрессии q=1/A. В случае выплат постнумерандо первый член прогрессии a=1/A, поэтому получаем $1/A*(1-1/ A^n)/(1-1/A)=S(0)$

В случае учета индексации пенсионных выплат решение можно построить аналогично. Например, при индексации по линейному закону уравнение преобразуется к виду:

$S(x+1)=A*S(x)-(1+B*x)$, где B является константой, определяющей степень индексации. Современная стоимость ренты в данном случае равна:

$$S(0)=(B+A-1) / (A-1)^2 - [(B*n/(A-1) + (B+A-1) / (A-1)^2]/A^n$$

В случае индексациии по степенному закону: $S(n+1)=A*S(n)-(1+B)^n$

Современная стоимость ренты равна:

$$S(0)=[1-(1+B)^n / A^n] / (A-B-1)$$

Устойчивость

Дифференциальное уравнение, описывающее прирост суммы *S* по сложному проценту имеет вид

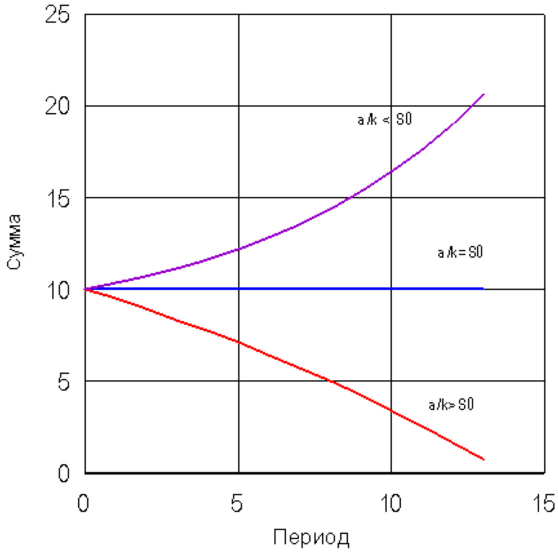
$$dS/dt= k*S,$$

где $k = ln(1+i)$, i - процентная ставка.

Случай ренты подчиняется уравнению вида

$$dS/dt=k*S-a ,$$

где *a* – размер выплат.



Решение имеет вид

$$S=(S0-a/k)*exp(k*t)+a/k,$$

где $S=S0$ при $t=t0$.

Данный пример является очень наглядным, поскольку, как видно из рисунка при $a/k < S0$ – рента является убывающей, при $a/k = S0$ – постоянная и при $a/k > S0$ – возрастающая. В последнем случае уровень процентной ставки обеспечивает доход, превышающий размер выплаты. При достаточно продолжительном временном интервале или числе членов ренты, начальная сумма меняется медленно и решение сильно зависит от начальных данных, т.е. носит явно неустойчивый характер. Однако реально, на продолжительном временном интервале всегда существуют колебания, как доходности, так и размера выплат. Поэтому значительный рост или уменьшение суммы недопустимы, в силу существования корреляции между размером выплат и процентной ставкой.

Тарифные сетки

При анализе влияния на величину современной стоимости ренты периода накопления и выплат, удобно пользоваться тарифными сетками. Ниже приведена тарифная сетка для процентной ставки 0%, 5% и 10%, в которой рассчитана современная стоимость ежемесячной ренты по формуле:

$${}_m a_n = \upsilon^m \frac{1-\upsilon^n}{i}$$

где

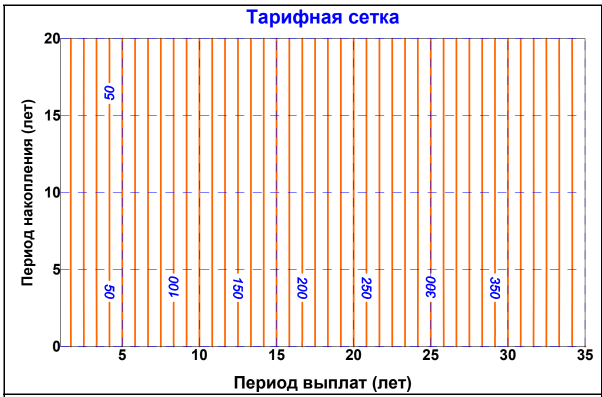
m – период накопления (период от внесения разового взноса до момента начала выплат)

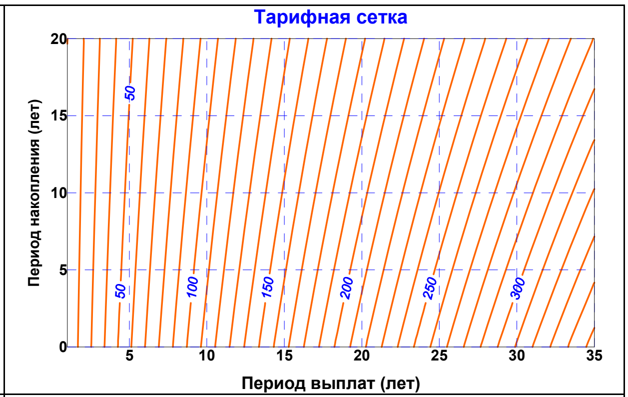
n – период ежемесячных выплат

i – ежемесячная процентная ставка

Таблица. Тарифная сетка. Современная стоимость отложенной ренты.

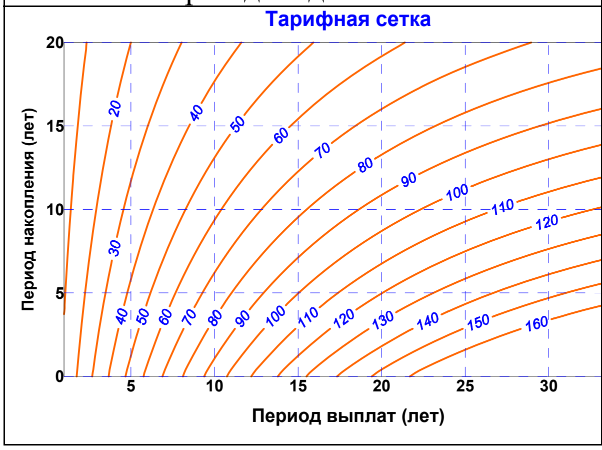
норма доходности 0%	норма доходности 1%

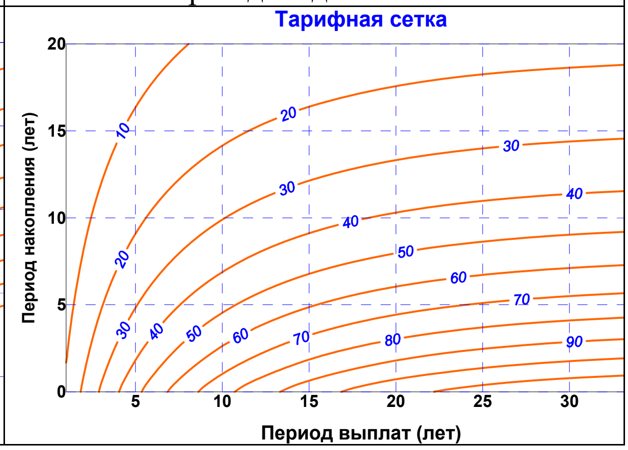




норма доходности 5%

норма доходности 10%





На рис. приведено поле современной стоимости отложенной ренты, величина которой надписана на изолиниях, в зависимости от периода накопления - вертикальная ось и периода выплат – горизонтальная ось. Размер выплат равен 1. Физический смысл значений на изолиниях – это современная стоимость предстоящих платежей. Читать диаграммы нужно следующим образом. Разовый взнос размером 60 без накопительного периода обеспечит ежемесячную единичную ренту в течение 7 лет. Тот же взнос при периоде накопления 5 лет обеспечит ежемесячную единичную ренту в течение 15 лет и т. д. Изолинии носят асимптотический характер. Для продолжительного периода выплат малые изменения в периоде накопления приводят к сильному увеличению периода выплат. Например, увеличение периода накопления для разового взноса 60 с 5 до 7.5 лет приводит к увеличению периода выплат более чем в два раза – с 15 до 35 лет соответственно. Это связано с тем, что при увеличении периода выплат увеличивается величина взноса, а соответственно и инвестиционного дохода, величина которого на большом периоде времени становится сравнимой с величиной выплат. Однако реально, на продолжительном временном интервале всегда существуют колебания, как доходности, так и размера выплат. Поэтому на практике всегда наблюдается отклонение реальной суммы резервов от расчетной.

Временные интервалы в приведенном примере характерны для долгосрочных задач пенсионного обеспечения. Однако, данный метод анализа так же применим для моделирования краткосрочных финансовых операций.

На рис. приведено аналогичное, представленному на рис. поле, в которое вносится возмущение в виде полосы с отрицательной доходностью величиной минус 10% годовых. Ширина полосы 5 лет. В остальной области норма доходности как и в предыдущем случае, равна 10% годовых. В данном случае моделируется кризис, который наступает через 20 лет и продолжается в течение 5-ти лет. В течение кризиса норма доходности принимается отрицательной. т.е. происходит частичная потеря активов. В нашем случае – это практически половина активов.

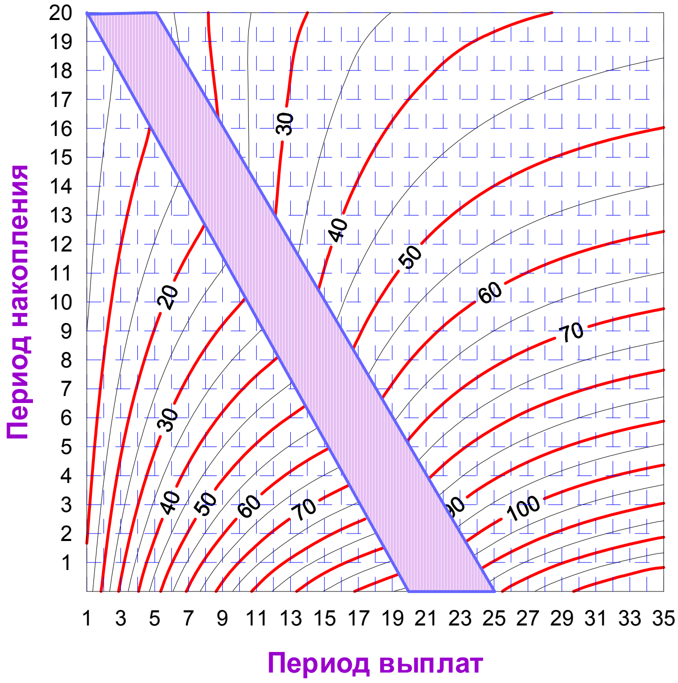
Дополнительное условие для нормы доходности имеет вид

$r(T)=10$ для ($T < T_1+T_2=20$ и $T \geq T_1+T_2=25$),

$r(T)=-10$ для ($T_1+T_2=20 \leq T < T_1+T_2=25$),

где T_1 – период накопления;

T_2 – период выплат.



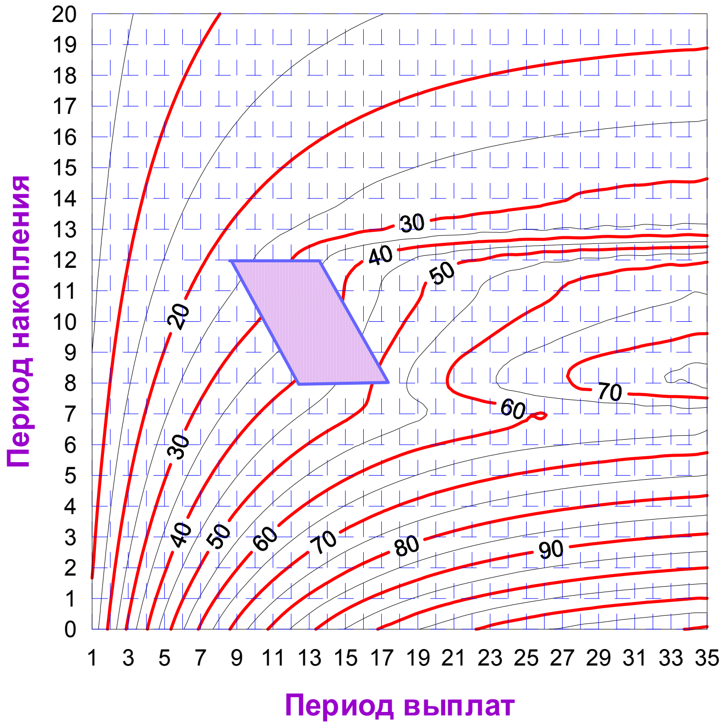
Из рис. видно, что после преодоления кризиса стоимость обязательств существенно возрастает. Если в первом случае разовый взнос 40 при периоде накопления приблизительно 10 лет обеспечивал выплаты в течение 20 лет, то при наличии сравнительно короткого отрезка отрицательной доходности для аналогичных периодов накопления и выплат взнос существенно возрастает и становится равным 55. По физической аналогии данную задачу можно назвать задачей преломления финансового потока.

На рис. так же изображено возмущенное поле разового взноса. В отличие от рис. полоса возмущения заменена областью локального возмущения. Данная задача называется – задачей обтекания финансовым потоком локального возмущения. Данная постановка моделирует инвестиционный кризис для отдельной возрастной группы участников, что вполне естественно, так как в зарубежной практике НПФ применяется различная инвестиционная стратегия в зависимости от возраста участников фонда. Чем ближе к пенсии, тем более консервативны инвестиции. Рассмотрим случай, когда пенсионные резервы определенной возрастной группы, состоящей из участников, которым остается до пенсии 8-12 лет, инвестируются на длительный срок в отдельный инвестиционный проект. Допустим, что данный проект обеспечивал первоначальные условия по доходности 10% годовых в течение 20 лет. Затем, по истечении 20-ти летнего периода наступает кризис, продолжающийся в течение 5-ти лет. В период кризиса доходность инвестиций отрицательная и равна –10% . По истечении кризиса доходность инвестиций восстанавливается на прежнем уровне 10% годовых.

Дополнительное условие для нормы доходности имеет вид

$r(T)=10$ для ($T < T_1+T_2=20$ и $T \geq T_1+T_2=25$),

$r(T)= -10$ для ($T_1+T_2=20 \leq T < T_1+T_2=25 \bigcap 8 \leq T_1 \leq 12$), где	T_1 – период накопления;



T_2 – период выплат.

На рис. представлено как изменится величина обязательств по пенсионным выплатам для выбранной возрастной группы при наличии 5-ти лет кризиса в течение периода выплат. Видно, что полоса возмущения распространяется только в зоне, ограниченной 8-12 годами периода накопления и находится за областью возмущения. Визуально область возмущенной доходности напоминает тело, находящееся в потоке жидкости, а линии уровня финансового потока – уровни течения жидкости. Поэтому данную задачу можно назвать - задачей обтекания финансовым потоком локального возмущения.

Данный метод анализа очень нагляден и помимо качественной картины позволяет получить количественные результаты. Кроме того, подобный подход имеет интересные гидродинамические аналогии. Предложенный метод может эффективно использоваться в задачах ситуационного моделирования, так как позволяет выявить области финансовой неустойчивости и проанализировать причины их возникновения.

Примеры расчетов

Рассмотрим несколько расчетных случаев. Пусть период выплат ограничен и равен 5 годам. Для простоты выплата осуществляется один раз в конце года. Тогда начальная сумма (современная стоимость будущих платежей) определяется как сумма пяти дисконтированных платежей. Допустим, размер выплаты равен 10 000 рублей. Норма доходности равна 4% годовых. В этом случае начальная сумма равна

$$a_5 = 10000 * (\frac{1}{1.04} + \frac{1}{1.04^2} + \frac{1}{1.04^3} + \frac{1}{1.04^4} + \frac{1}{1.04^5}) = 10000 * 4.4518 = 44518$$

$$\upsilon = \frac{1}{1+0.04} = 0.9615$$

$$a_5 = \frac{1-0.9615^5}{0.04} = 44518$$

Видно, что современная стоимость, потока платежей общей стоимостью 50 000 рублей ниже и равна 44 518 рублей. За 1-й год данная сумма увеличится на 4% процента и составит 46 299 рублей. В конце года осуществляется выплата 10 000 рублей и остаток суммы на ИПС составит 36 299 рублей. В таблице приведено изменение суммы ИПС по годам в течение всего периода.

Год	0	1	2	3	4	5
Сумма на ИПС	44518	36299	27751	18861	9615	0
Доход		1781	1452	1110	754	385
Выплата в конце периода		10000	10000	10000	10000	10000

Аналогичным образом определяется и размер суммы, обеспечивающей ежемесячные выплаты в течение 10-ти летнего периода. В этом случае число выплат равно 120. Эффективная ежемесячная доходность, при годовой норме доходности 4% равна

$$r_m = (1+0.04)^{1/12} - 1 = 0.0033$$

Пусть размер выплаты равен 1000 рублей, тогда современная стоимость будущих платежей равна

$$a_{120} = 1000*(\frac{1}{1+0.0033} + \frac{1}{(1+0.0033)^2} + ... + \frac{1}{(1+0.0033)^{119}} + \frac{1}{(1+0.0033)^{120}})$$

Как видно число слагаемых велико. Для определения суммы можно воспользоваться формулой для определения суммы геометрической прогрессии со знаменателем равным

$$\upsilon = \frac{1}{1+0.00327} = 0.99674$$

$$a_{120} = \frac{1-\upsilon^{120}}{i} = 99{,}103$$

Пожизненные ренты

Выплата производится в конце периода

$$a_x = p_x \times \upsilon + {}_2p_x \times \upsilon^2 + .. + {}_{\omega}p_x \times \upsilon^{\omega} = \sum_{k=1}^{\omega} {}_k p_x \times \upsilon^k$$

ω - предельный возраст по таблице дожития

Выплата производится в начале периода

$$\ddot{a}_x = 1 + p_x \times \upsilon + {}_2p_x \times \upsilon^2 \ + .. + {}_{\omega}p_x \times \upsilon^{\omega} = \sum_{k=0}^{\omega} {}_k p_x \times \upsilon^k$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

В случае выплат внутри года можно применять формулу Вулхауза

$$\ddot{a}^m{}_x = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

m – число выплат внутри года

Коммутационные функции

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + l_{x+1} \times \upsilon + l_{x+2} \times \upsilon^2 + ...}{l_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x \times \upsilon^x + l_{x+1} \times \upsilon^{x+1} + l_{x+2} \times \upsilon^{x+2} + ...}{l_x \times \upsilon^x}$$

Обозначим

$$D_x = \upsilon^x * l_x, \ N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ...$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}, \ a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Техника функциональных уравнений для страхового аннуитета

Рассмотрим как применима техника функциональных уравнений для страхового аннуитета. Каждая выплата (I) может быть определена как p*I, где p-вероятность наступления события или в нашем случае вероятность дожития до возраста x, начиная с возраста y. Вероятность p можно рассчитать, зная функцию выживания sf(x)=p(X>x), которая может быть построена по таблице дожития как sf(x)=L(x)/L(0), где L(x) и L(0) – число людей доживших до возраста x и число родившихся соответственно. Сеточная функция sf(x) является гладкой и для достаточно широких интервалов может быть приближена полиномом. Для примера выберем функцию sf(x) для мужского городского населения, составленную по результатам микропереписи населения в 1993 г. Рассмотрим приближение полиномом 2-й степени функции выживания на отрезке 40-80 лет. Естественно, что увеличение степени полинома приведет к уменьшению погрешности аппроксимации, однако в этом случае аналитическое решение принимает более сложный вид. Например, полиномом 10-й степени можно достаточно точно приблизить функцию выживания в диапазоне от 0 – 100 лет, однако коэффициенты в решении получается настолько громоздкими, что проще перейти к привычным суммам, образующимся в результате решения балансового уравнения. Для менее точных оценок можно ограничить таблицу дожития выживания возрастом, соответствующим точке перегиба функции sf(x), приблизительно находящейся в возрасте 90 лет.

На рис. приведена функция, построенная методом наименьших квадратов, которая аппроксимирует функцию выживания (сплошная линия) полином $Y=D0+D1*X+D2*X^2$ с коэффициентами : D0=1.03, D1=0.00339, D2=-0.0001855 (пунктирная линия). По оси абсцисс отложен возраст, по оси ординат число доживших до данного возраста, нормированное на общее число родившихся.

В этом случае уравнение, определяющее величину разового взноса для обеспечения срочного пенсионного страхования сводится к виду:

$$S(x+1)=A*S(x)-(D0+D1*x+D2*x^2)/Const,$$

А решение имеет вид:

$$S(x)=const0*A^x - const1-const2*x-const3*x^2,$$

Где

Const - определяет число доживших до возраста age,

Const= D0+D1*age+D2*age*age

Const0 – определяется из начальных условий. Если выплата производится раз в год, то $S(y+n)=0$, следовательно $Const0=[const1+const2*(y+n)+const3*(y+n)^2]/A^n$

$Const1= [D0*(1-A)/Const+D1/Const+D2/Const*(1-2/(1-A)]/ (1-A)^2$

Const2= [D1/Const-2*D2/(const*(1-A))]/(1-A)

Const3=D2/(1-A)/const

Сравним результаты расчетов функционального уравнения с решением балансового уравнения для единичной ежегодной выплаты, нормы доходности 10 % (r=0.1), p(i) определяется по таблице смертности городского населения 1993 года для мужчин. Результаты сравнения решений, полученных по уравнению баланса и оценке и ренты при p(i)= 1 приведены на рис. По оси абсцисс отложен возраст, по оси ординат величина разового взноса, соответствующая данному возрасту, которая обеспечивает единичные выплаты постнумерандо до возраста 60 лет.

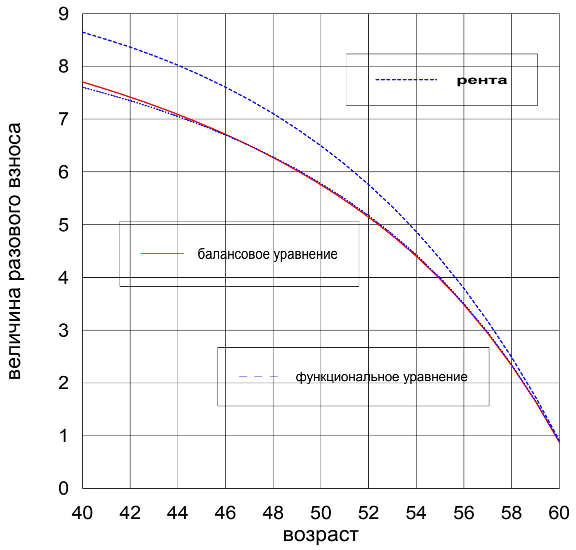


Рис. Сравнение результатов расчета функционального уравнения с решением балансового уравнения

Примеры расчетов

Рассмотрим ограниченный период выплат, с условием, что выплаты носят условный характер, т.е. при расчете современной стоимости учитывается дожитие. Пусть период выплат ограничен и равен, как и в предыдущем случае, 5 годам. В отличие от срочной ренты существует вероятность осуществления каждой выплаты, которая определяется вероятностью дожития до момента платежа. Вероятность прожить год с возраста х, определяется по формуле

$$p_{60} = \frac{l_{61}}{l_{60}},$$

где l_{60}, l_{61} – число доживших до возраста *60* и 61 год, определяемое по таблице дожития. Рассмотрим численные значения данных вероятностей для мужчин возраста 60 лет в течение 5 лет. Выберем из таблицы 1 число доживших мужчин до возраста 60-65 лет и рассчитаем вероятности дожития в течение 5-ти лет, начиная с 60 лет. Результаты приведены в таблице.

Возраст	60	61	62	63	64	65
Число доживших до заданного возраста	92 866	92 233	91 544	90 795	89 982	89 099
Вероятность дожития, с возраста 60 лет		0,993	0,986	0,978	0,969	0,959
Дисконтный множитель		0,962	0,925	0,889	0,855	0,822
Произведение вероятности дожития на дисконтный множитель		0,955	0,911	0,869	0,828	0,789

Для определения современной стоимости предстоящих платежей в течение 5 лет необходимо дополнительно умножить каждое слагаемое суммы (дисконтный множитель) на искомую вероятность. Обе величины приведены в таблице. Окончательно получим

$$S = 10000 * (\frac{0,993}{1.04} + \frac{0,986}{1.04^2} + \frac{0,978}{1.04^3} + \frac{0,969}{1.04^4} + \frac{0,959}{1.04^5}) = 10000 * 4.3524 = 43524$$

Как видно данная сумма меньше безусловной стоимости платежей в течение 5 лет. Так стоимость 5-ти летней ренты равна 44 518 рублей, при ежегодной разовой выплате 10 000 рублей, а стоимость условных выплат, учитывающих вероятность дожития равна 43 524 рубля.

Финансовые потоки.

Модель финансового потока

Изменение суммы S, начиная с начальной суммы S_0, размещенной под процентную ставку r на время t (время нормируется на число дней в году) имеет следующий вид:

$$S=S_0*(1+r)^t \qquad (1)$$

Очевидно, что величина суммы финансового потока на фиксированный момент времени определяется как:

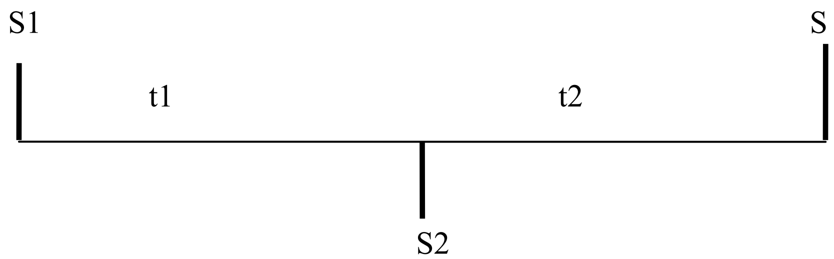
$$S=\sum_{i=1}^{N} S_0(i)*(1+r)^{t(i)} \qquad (2)$$

где i - номер операции,

t(i) - продолжительность i-й операции с момента начала операции до фиксированного момента времени,

N - общее число операций.

Данное выражение легко проверяется. Рассмотрим для простоты две операции внутри периода t=t1+t2: размещение суммы S1 в начальный момент времени и извлечение суммы S2 в момент времени t1.



В этом случае последовательно определяя изменение конечной суммы на момент t получаем:

$$S=(S1*(1+r)^{t1} -S2)* (1+r)^{t2-}=S1*(1+r)^{(t1+t2)}-S2*(1+r)^{t2}$$

В случае, когда отдельная сумма S_0 размещается с отличной от средней рыночной доходности (r°), увеличение или уменьшение величины активов можно компенсировать отрицательным фиктивным потоком S_f:

$$S_f*[(1+ r)^t - 1]= S_0*(1+ r)^t - S_0*(1+ r°)^t \text{ при } r > r°)$$

или положительным фиктивным потоком S_f

$$S_f*[(1+ r)^t - 1]= S_0*(1+ r°)^t - S_0*(1+ r)^t \text{ при } r° >r$$

Сумма фиктивного потока S_f не должна изменить существующую величину активов, поэтому избыточная или недополученная прибыль в результате инвестирования под процентную ставку r° должна быть равна прибыли фиктивного потока, а сам поток идентифицирован специальным индикатором.

В случае переменной процентной ставки сумма потока рассчитывается аналогично (2):

$$S=\sum_{i=1}^{N} S_0(i)*(1+r_{эфф})^{t(i)} \qquad (3)$$

только вместо постоянной процентной ставки r для каждой операции применяется эффективная процентная ставка $r_{эфф}$. Максимальное значение $r_{эфф}$ при большом числе циклов реинвестирования и следовательно коротком периоде инвестирования определяется следующим образом:

$$(1+ r_{эфф})^t = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right) \qquad (4)$$

Однако при высоком уровне доходности величина $r_{эфф}$, определенная с использованием (4) оказывается сильно завышенной, поэтому в этом случае целесообразно использовать в расчетах следующие аппроксимации для эффективной доходности:

$$r_{эфф} = 1/t \int_0^t r(\tau)d\tau \qquad (5)$$

или

$$(1+ r_{эфф})^t = \prod_{i=1}^{N}(1+ r(\tau+i*\Delta\tau)) \qquad (6)$$

где $r(\tau)$ - функция изменения процентной ставки,

$N=t/\Delta\tau$ - число циклов реинвестирования за рассматриваемый период,

$r(\tau+i*\Delta\tau)$ - среднее значение функции изменения процентной ставки за временной интервал $[\tau,\tau+\Delta\tau]$

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение денежного потока в случае переменной доходности и дополнительных операций, связанных со взносами или выплатами, имеет вид:

$$dS(t)/dt=\ln(1+r (t))*S(t) +a(t) \quad (8),$$

Точное решение (8) приведено в [1] и выглядит следующим образом:

$$S(t)=\exp\left(\int_0^t(\delta(s)ds\right)*S(0)+ \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t(\delta(s)ds)\right)*a(\tau)d\tau \quad (9)$$

где $\delta(s)=\ln(1+r(t))$, называемая так же силой роста,

$a(t)$ - функция определяющая дискретное значение взносов или выплат.

Расчет эффективной процентной ставки

Основными величинами, характеризующими финансовый поток, являются: количество операций, сумма и дата операции, позволяющая определить продолжительность отдельной операции. Для определения доходности финансового потока дополнительно необходимо знать абсолютную величину дохода полученного в течение исследуемого периода. В финансовых вычислениях наиболее часто используют коэффициент роста капитала, определенный в простейшем случае как отношение суммы в конце периода к начальной сумме, и коэффициент прироста капитала, который также носит название доходности:

$$Int = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \qquad (1)$$

В случае если сумма S_0 соответствует располагаемой сумме в начале года, а S_1 - сумма в конце года, при отсутствии операций внутри года, данное выражение определяет величину годовой доходности. Однако, между датами, ограничивающими финансовый поток, как правило существуют различные операции по перечислению пенсионных взносов и выплат или операции между НПФ и управляющей компанией. Поэтому при расчете доходности потока платежей обычно применяется метод внутренней нормы доходности (Internal Rate of Return IRR), в котором поток платежей представляется в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{code(i) * S(i)}{(1+\mathrm{int})^{t(i)/T}} = 0, \qquad (2)$$

где n – количество финансовых операций;

S(i) – сумма операции;

code(i)– знак операции (code(i)=1- для взносов, code(i)=-1 для выплат);

int – инвестиционная доходность;

t(i) – продолжительность *i-й* операции (разность между датой окончания и начала операции);

T- число календарных дней в году.

Приведенное выше выражение в виде (2) часто встречается в методиках оценки инвестиционных проектов и представляет собой балансовое уравнение между суммой инвестированных средств *S(0) при t(0)=0* и *code(0)=-1*, и суммы обратного дисконтированного потока платежей. Значение инвестиционной доходности в данном методе находится при помощи итераций.

Для финансового потока, в котором баланс между совершенными операциями подводится в конце периода выражение, используемое в методе (IRR) преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{i=1}^{n} code(i) * S(i) * (1+\mathrm{int})^{t(i)/T} = S_{bal}, \qquad (3)$$

где S_{bal} – балансовая стоимость пенсионных резервов в конце года, определяемая как сумма взносов, выплат и суммарного инвестиционного дохода. Для решения уравнения (3), которое не допускает точного решения, применяется численный метод. В качестве примера приведем наиболее распространенный алгоритм, использующий метод Ньютона. В этом случае итерационный процесс можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{int}_{k+1} = \mathrm{int}_k + \frac{\sum_{i=1}^{n} code(i) * S(i) * (1+\mathrm{int}_k)^{t(i)/T} - S_{bal}}{\sum_{i=1}^{n} code(i) * \frac{t(i)}{T} * S(i) * (1+\mathrm{int}_k)^{t(i)/T-1}} \qquad (4)$$

При применении данного метода возникает вопрос единственности решения. В случае однократного чередования знака операций, например, первыми были выполнены операции взносов (перечислений), а вторыми – операции выплат (возврата), уравнение имеет единственное решение. Учитывая, что реальный финансовый поток может иметь много чередований знака операций, уравнение (3) имеет несколько решений и итерационный процесс может сходиться к различным корням, в зависимости от начального приближения, которое можно легко оценить, используя систему начисления простых процентов или иначе средневзвешенную стоимость пенсионных резервов. В этом случае уравнение (3) преобразуется к виду:

$$\sum_{i=1}^{n} code(i) * S(i) * \frac{t(i)}{T} * \mathrm{int} = S_{inc}, \qquad (5)$$

а доходность определяется по формуле:

$$\text{int} = \frac{S_{inc}}{\sum_{i=1}^{n} code(i) * S(i) * \frac{t(i)}{T}}, \qquad (6)$$

где S_{inc} – суммарный инвестиционный доход за период.

Пример. Оценка рентабельности договоров по ОПС

Поток платежей по ОПС в виде затрат Фонда и полученной части инвестиционного дохода представляется в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S(i)}{(1+\text{int})^i} = S_{\exp},$$

где n – число лет, в течение которых осуществляется перевод средств из ПФР в НПФ по договору ОПС;

S(i) – сумма переводимых денежных средств;

S_{exp} – сумма агентского вознаграждения, выплачиваемого в случае перехода застрахованного лица из ПФР в НПФ;

int – инвестиционная доходность

Приведенное выше выражение часто встречается в методиках оценки инвестиционных проектов и представляет собой балансовое уравнение между суммой инвестированных средств S_{exp} и суммы обратного дисконтированного потока платежей. Значение инвестиционной доходности в данном методе находится при помощи итераций.

В качестве примера приведем наиболее распространенный алгоритм, использующий метод Ньютона. В этом случае итерационный процесс можно представить в следующем виде:

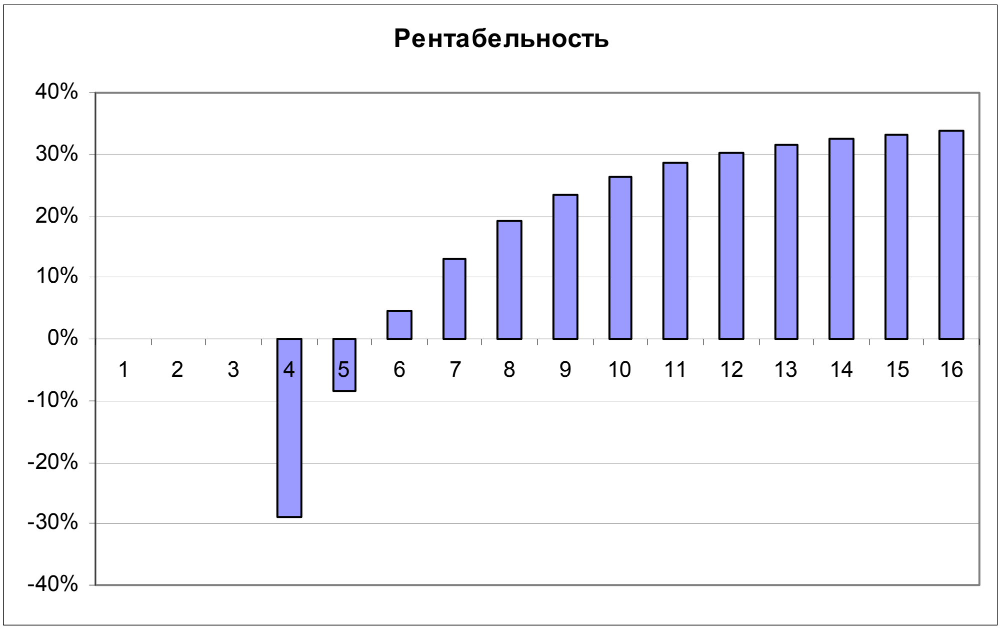
$$\text{int}_{k+1} = \text{int}_k - \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{S(i)}{(1+\text{int})^i} - S_{\exp}}{\sum_{i=1}^{n} -(i+1) * \frac{S(i)}{(1+\text{int})^{i+1}}}$$

В стандартных формулах Excel существует специальная формула ВСД

Таблица. Численный пример для варианта 2 (тестирование). Параметры: темп роста з.п. -10%, норма доходности – 5%

Год	размер з.п.	сумма поступлений на накопительный счет	сумма накопительного счета (на начало года, после учета отчислений на ИОУД)	Ежегодная сумма инвестиционного дохода	Ежегодный доход фонда	Рентабельность
0		25 000			-1 000	
1	15 000	10 800			0	
2	16 500	11 880	36 862,600	1 208	144,900	
3	18 150	13 068	50 625,91	2 140	256,816	-29%

4	19 965	14 375	66 208,95	2 858	342,959	-9%
5	21 962	15 812	83 813,19	3 670	440,378	4%
6	24 158	17 394	103 661,12	4 586	550,316	13%
7	26 573	19 133	125 998,38	5 618	674,147	19%
8	29 231	21 046	151 096,09	6 778	813,389	23%
9	32 154	23 151	179 253,47	8 081	969,715	26%
10	35 369	25 466	210 800,70	9 541	1 144,973	29%
11	38 906	28 012	246 102,02	11 177	1 341,202	30%
12	42 797	30 814	285 559,20	13 005	1 560,649	32%
13	47 076	33 895	329 615,36	15 048	1 805,796	32%
14	51 784	37 285	378 759,15	17 328	2 079,377	33%
15	56 962	41 013	433 529,35	19 870	2 384,409	34%



Актуарная нотация

Основные обозначения (актуарная нотация)

Актуарная нотация	Определение
$\ddot{a}_x, a_x$	современная стоимость пожизненной ренты, выплачиваемой в начале и конце периода
$\ddot{a}_n, a_n$	современная стоимость ренты, выплачиваемой в течение периода n в начале и конце периода

Актуарная нотация	Определение
p_x	вероятность прожить год, начиная с возраста (x)
${}_n p_x$	вероятность прожить n лет, начиная с возраста (x)
q_x	вероятность умереть в возрасте (x) в течение года
${}_n q_x$	вероятность умереть в течение n лет, начиная с возраста (x)
${}_{n\|} q_x$	вероятность прожить n лет и умереть в следующем году