

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СТРАХОВОГО РЕЗЕРВА НЕГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕНСИОННОГО ФОНДА



**Елена КРЮКОВА**

*Главный актуарий НПФ «Империя», доцент кафедры «Математического анализа и теории функций» Волгоградского государственного университета, кандидат технических наук*

**Р**ассмотрим негосударственный пенсионный фонд, исключительным видом деятельности которого является негосударственное пенсионное обеспечение работников предприятий-вкладчиков. Предприятия-вкладчики вносят пенсионные взносы, которые до их использования для выплат негосударственных пенсий инвестированы в активы, обеспечивающие инвестиционный доход. Пенсионные договоры с предприятиями предусматривают обязательства фонда по выплатам ежемесячных пожизненных негосударственных пенсий участникам после формирования в полном объеме пенсионного резерва из пенсионных взносов вкладчика и инвестиционного дохода. Пенсионный резерв состоит из резерва покрытия пенсионных обязательств и страхового резерва.

Основным источником формирования страхового резерва является доход от размещения пенсионных резервов. Отсюда, чем больше будет страховой резерв, тем меньше будет начислено дохода на пенсионные счета, а следовательно, меньше эффективность работы фонда. Если страховой резерв недостаточен для покрытия возможных отклонений резерва покрытия пенсионных обязательств от расчетного значения, это оказывает отрицательное влияние на устойчивость фонда, поскольку современная стоимость пенсионных обязательств может превысить современную стоимость пенсионного резерва. Поэтому задача определения величины страхового ре-

зерва имеет важное значение для обеспечения устойчивости и эффективности работы фонда.

Критерии устойчивости и эффективности работы фонда можно сформулировать следующим образом.

Положение фонда будет устойчивым, если для каждого будущего года выполняется условие устойчивости, согласно которому современная стоимость активов  $F_t$  равна современной стоимости пенсионных обязательств  $PL_t$  на момент оценивания  $t$ :

$$F_t = PL_t$$

Работу фонда следует считать эффективной, если по итогам отчетного года доходность к начислению на пенсионные счета  $r_n$  равна или превышает процент инфляции  $r_I$ :

$$r_n \geq r_I$$

Если доходность к начислению на пенсионные счета по итогам года превышает процент инфляции, то доход может быть направлен на пополнение резерва покрытия пенсионных обязательств и страхового резерва (страховой резерв не используется). Если доходность к начислению на пенсионные счета меньше процента инфляции, то страховой резерв может быть использован для пополнения резерва покрытия пенсионных обязательств. Поэтому для определения необходимой

и достаточной величины страхового резерва следует оценить возможные отклонения доходности к начислению на пенсионные счета от прогнозируемого уровня инфляции.

Резерв покрытия пенсионных обязательств предназначен для выполнения обязательств фонда перед участниками по выплатам им негосударственных пожизненных пенсий, современная годовая стоимость которых в момент времени  $t$  составляет  $B_t$ . Пенсии выплачиваются с момента времени  $t$  до момента смерти участника.

Рассмотрим модель закрытого фонда со стационарной популяцией участников, выбытие участников возможно только по причине смерти. Пенсионных взносов нет, так как пенсионный резерв сформирован в полном объеме. Размер выплачиваемых пенсий для каждого участника постоянен, пенсии не индексируются. Общий размер пенсионных выплат – случайная величина, зависящая от продолжительности предстоящей жизни участников.

Размер пенсионных обязательств перед участниками на момент времени  $t$  может быть определен как математическое ожидание современной стоимости выплат пожизненных негосударственных пенсий на момент времени  $t$  с учетом риска отклонения современной стоимости выплат от ожидаемого значения вследствие неопределенности продолжительности предстоящей жизни участников:

$$PL_t = E[AL_t] + R_T.$$

Принимая, что неопределенность, связанная со ставкой дисконтирования, отсутствует (т.е. ставка дисконтирования соответствует ее наиболее вероятному значению), используем в расчетах среднее значение годовых процентных ставок уровня инфляции за период предстоящих выплат.

В этом случае имеет место по крайней мере два основных типа неопределенности, которые могут привести к отклонению современной стоимости пенсионного резерва от нормативного значения:

1) неопределенность продолжительности предстоящей жизни участников фонда;

2) неопределенность доходности к начислению на пенсионные счета.

Поскольку размер страхового резерва  $SR_t$  на момент времени  $t$  предназначен для покрытия неопределенности доходности активов прежде всего следующего года, рассмотрим изменение современной стоимости активов в течение года:

$$F_{t+1} = (F_t - B_t^1)(1 + r_n)$$

где:  $F_{t+1}$  – современная стоимость пенсионного резерва на следующий год  $t+1$  после момента оценивания  $t$ ;

$B_t^1$  – планируемое значение современной стоимости выплат участникам фонда в течение 1 года от момента времени  $t$  до  $t+1$ , приведенных к моменту времени  $t^*$ ;

$r_n$  – планируемое значение доходности к начислению на пенсионные счета в следующем году от момента времени  $t$  до  $t+1$ .

Считая задачей расчета определение размера страхового резерва, достаточного для покрытия в частности, отрицательных отклонений доходности к начислению на пенсионные счета от процента инфляции, рассмотрим пессимистический сценарий результатов инвестиций, когда доходность к начислению на пенсионные счета ниже процента инфляции:

$$r_n = r_I - \sigma_{pl},$$

где:  $r_I$  – планируемое значение процента инфляции в будущем году, дес. долях;

$\sigma_{pl}$  – отклонение доходности портфеля активов с учетом расходов фонда от процента инфляции, дес. долях. Тогда современную стоимость активов фонда в следующем году можно представить в виде:

$$F_{t+1} = (F_t - B_t^1)(1 + r_I - \sigma_{pl}) = (F_t - B_t^1)(1 + r_I) - R_n,$$

где:  $R_n = (F_t - B_t^1)\sigma_{pl}$ , (руб.) – риск отклонения доходности к начислению на пенсионные счета от предполагаемого процента инфляции.

Условие устойчивости фонда с учетом рассматриваемых рисков отклонений доходности активов и продолжительности предстоящей жизни участников от ожидаемых значений можно представить в виде:

$$(F_t - B_t^1)(1 + r_I) = E[AL_{t+1}] + SR_{t+1},$$

где:  $E[AL_{t+1}]$  – математическое ожидание современной стоимости пожизненных выплат на момент времени  $t+1$  для рассматриваемой модели закрытого фонда представляет собой резерв покрытия пенсионных обязательств;

$SR_{t+1} = R_n + R_t$  – страховой резерв, предназначенный для покрытия рисков следующего за моментом оценивания года, равный сумме рисков отклонений планируемого значения доходности к начислению на пенсионные счета от ожидаемого уровня инфляции  $R_n$  и современной стоимости пожизненных выплат участникам вследствие неопределенности продолжительности предстоящей жизни  $R_t$ .

Найдем риск отклонения доходности к начислению на пенсионные счета от предполагаемого процента инфляции на следующий год.

Пусть планируемая современная стоимость пенсионного резерва составляет 240 млн руб. Из

\* Отклонением планируемых значений современных стоимостей выплат за год  $B_t^1$  от фактического значения можно пренебречь, т.к. оно приведет к соответствующему изменению современной стоимости обязательств.

них 75% передано в доверительное управление управляющей компании (УК) и 25% находится в собственном управлении и инвестировано в депозиты, средневзвешенная годовая доходность по которым составляет 16%. Доходность от размещения пенсионных резервов управляющей компании  $r_{УК}$  описывается следующей двухфакторной моделью:

$$r_{УК} = r_f + b_{PTC}(r_{PTC} - r_f) + b_I(r_I - r_f)$$

где:  $r_f$  – безрисковая ставка доходности,  
 $b_{PTC}$  – чувствительность доходности управляющей компании к изменению рыночного индекса (индекса РТС);

$r_{PTC}$  – предполагаемая доходность рыночного индекса на следующий год;

$b_I$  – чувствительность доходности управляющей компании к изменению процента инфляции (индекса потребительских цен);

$r_I$  – предполагаемое значение процента инфляции (прирост индекса потребительских цен) в следующем году.

Например, на 2005 год имеем:

$$r_{УК} = r_f + 0,64(r_{PTC} - r_f) + 0,5(r_I - r_f),$$

при  $r_f=6\%$ ,  $r_{PTC}=14\%$ ,  $r_I=12\%$  доходность управляющей компании составит 14%.

Тогда доходность к начислению на пенсионные счета с учетом расходов фонда составит

$$r_n = (r_{УК} - r_{sk}) \cdot W_{УК} + (r_{CY} - r_{ss}) \cdot W_{CY},$$

где:  $r_{sk}$  – уменьшение доходности за счет расходов фонда по активам в управляющей компании;

$W_{УК}$  – доля активов в управляющей компании;

$r_{CY}$  – доходность активов в собственном управлении;

$r_{ss}$  – уменьшение доходности за счет расходов фонда по активам в собственном управлении.

Для нашего примера предполагаемая по пессимистическому сценарию доходность к начислению на пенсионные счета составит:

$$r_n = (0,140 - 0,035) \cdot 0,75 + (0,160 - 0,025) \cdot 0,25 = 0,1125.$$

Учитывая, что планируемый процент инфляции – 12%, определим размер страхового резерва, который необходимо создать для покрытия расчетных значений отклонений доходности к начислению на пенсионные счета от уровня инфляции:

$$R_n = (F_t - B_t) \sigma_{pl}$$

$$R_n = 240000 \cdot (0,1200 - 0,1125) = 1800 \text{ (тыс. руб.)}$$

Найдем риск отклонений современной стоимости пожизненных выплат от ожидаемого значе-

ния  $R_T$ . Вычислим математическое ожидание современной стоимости выплат размера 1 рубль для одного участника возраста  $x$ , которые осуществляются ежегодно, пока лицо живо.

Для лица возраста  $x$  в момент времени  $t=0$  современная стоимость выплат размера 1 рубль от момента времени  $t=0$  до момента  $T$  смерти лица в возрасте  $X$  как:

$$Y = \bar{a}_T = \sum_{t=0}^T v^t = \frac{1-v^T}{\delta},$$

для  $T>0$ , где случайная величина  $T=X-x$  обозначает продолжительность предстоящей жизни лица возраста  $x$ .

Число предстоящих годовых выплат равно числу лет предстоящей жизни  $T$ . Это дискретная случайная величина с двумя возможными значениями 0 (если лицо умерло) и 1 (если лицо живо). Ряд распределений случайной величины числа лет предстоящей жизни имеет вид:

$0$	$1$
${}_t q_x$	${}_t p_x$

где:  ${}_t p_x$  – вероятность лицу возраста  $x$  прожить  $t$  лет;

${}_t q_x$  – вероятность лицу возраста  $x$  умереть через  $t$  лет.

По определению математических ожиданий математическое ожидание каждого года предстоящей жизни равно:

$$\text{для первого года } m_1 = 0 \cdot {}_1 q_x + 1 \cdot {}_1 p_x = {}_1 p_x,$$

$$\text{для второго года } m_2 = 0 \cdot {}_2 q_x + 1 \cdot {}_2 p_x = {}_2 p_x,$$

и т.д.,

$$\text{для } t\text{-го года жизни } m_t = 0 \cdot {}_t q_x + 1 \cdot {}_t p_x = {}_t p_x.$$

По теореме сложения математических ожиданий математическое ожидание числа лет предстоящей жизни, а следовательно, и числа предстоящих выплат равно сумме вероятностей дожития лица возраста  $x$  с момента времени 0 до каждого последующего года  $t$  в течение продолжительности предстоящей жизни  $T$ :

$$M[T] = \sum_{t=0}^T m_t = \sum_{t=0}^T {}_t p_x,$$

Тогда математическое ожидание современной стоимости выплат размера 1 рубль для лица возраста  $x$  равно:

$$E[\bar{a}_T] = \sum_{t=0}^T v^t \cdot {}_t p_x,$$

Для непрерывного страхового аннуитета в предположении, что интенсивность смертности  $\mu$  и интенсивность начисления процента  $\delta$  постоянны, имеем:

$$E[\bar{a}_T] = \bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\delta + \mu}$$

Дисперсия современной стоимости выплат

$$D[\bar{a}_T] = D\left[\frac{1-v^T}{\delta}\right] = D\left[\frac{v^T}{\delta^2}\right] = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}.$$

Поскольку при постоянной силе смертности и интенсивности начисления процента

$$\bar{A}_x = \int e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}.$$

тогда

$${}^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{2\delta + \mu}, \quad ((\bar{A}_x)^2) = \left(\frac{\mu}{\delta + \mu}\right)^2,$$

то

$$r_T^2 = D[\bar{a}_T] = \frac{1}{\delta^2} \left[ \frac{\mu}{2\delta + \mu} - \left(\frac{\mu}{\delta + \mu}\right)^2 \right] = \frac{\mu}{(2\delta + \mu)(\delta + \mu)^2}.$$

Интенсивность смертности находим по таблицам смертности по формуле:  $\mu_x = -\ln p_x$ ,

где:  $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$  – вероятность лицу возраста  $x$

прожить один год.

Таким образом, математическое ожидание современной стоимости пожизненных выплат для одного участника возраста  $x$  равно

$$E[Y_x] = B_x \cdot \bar{a}_x, \text{ (руб.)},$$

$$\text{дисперсия} - D[Y_x] = B_x^2 \cdot r_T^2, \text{ (руб.}^2\text{)},$$

где:  $\bar{a}_x$  – ожидаемая современная стоимость пожизненных выплат размером 1 рубль;

$B_x$  – годовой размер пожизненных выплат участнику возраста  $x$ , (руб.).

Для группы участников возраста  $x$  математическое ожидание современной стоимости пожизненных выплат в момент времени  $t$ :

$$E[{}_tAL_x] = E[Y_x] \cdot N_x,$$

$N_x$  – число участников возраста  $x$ , получающих пенсионные выплаты.

Найдем минимальную величину фонда пожизненных выплат участникам возраста  $x$   $S_x$  в момент времени  $t$ , достаточную для обеспечения пожизненных выплат этим участникам с вероятностью 0,95.

Предполагая, что современные стоимости пожизненных выплат являются независимыми нормально распределенными случайными величинами, необходимую минимальную величину фонда

выплат для группы участников возраста  $x$  найдем из соотношения

$$P(S_x < E[{}_tAL_x]) = 0,95$$

или

$$P\left[\frac{S_x - E[{}_tAL_x]}{\sqrt{D[Y]_x \cdot N_x}}\right] = 0,95.$$

Отсюда риск отклонений современной стоимости пожизненных выплат участникам возраста  $x$  от ожидаемого значения равен

$$R_x = \sqrt{D[Y]_x \cdot N_x} \cdot 1,645.$$

Ожидаемое значение размера резерва покрытия пенсионных обязательств  $E[AL_t]$  для участников фонда на момент времени  $t$  определяют как сумму математических ожиданий современных стоимостей предстоящих пожизненных выплат для каждой группы участников возрастов  $x[x_0, x_n]$ :

$$E[AL_t] = \sum_{x=x_0}^{x_n} E[{}_tAL_x],$$

где:  $x_0, x_n$  – возраст самого молодого и самого старшего участника группы на момент времени  $t$ ;

$x$  – возраст участника в момент времени  $t$ ;

${}_tAL_x$  – современная стоимость предстоящих пожизненных выплат участникам возраста  $x$ , произведенных от момента времени  $t$  до момента смерти этих участников.

Предполагая, что современные стоимости пожизненных выплат участникам независимы между собой, найдем риск отклонения резерва покрытия пенсионных обязательств от ожидаемого значения вследствие неопределенности продолжительности предстоящей жизни участников  $R_T$  как сумму рисков отклонений современных стоимостей пожизненных выплат участникам возраста  $x$  для всех возрастов от  $x_0$  до  $x_n$

$$R_T = \sum_{x=x_0}^{x_n} R_x.$$

Ожидаемое значение резерва покрытия пенсионных обязательств и риски отклонений, рассчитанные с использованием различных таблиц смертности и численности участников фонда  $N$ , представлены в таблицах 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 (тыс. руб).

Таблица 1.1

Ожидаемое значение резерва покрытия пенсионных обязательств и риски отклонений при числе участников фонда N=11000

Таблица смертности	$E[AL_t]$ , тыс. руб.	$R_T$ , тыс. руб.	$\frac{R_T}{E[AL_t]} \cdot 100\%$
1992	245 703	6385	2,6
1996	237 272	6387	2,7
2002	232 570	6403	2,8

Таблица 1.2

Ожидаемое значение резерва покрытия пенсионных обязательств и риски отклонений при числе участников фонда N=1100

Таблица смертности	$E[AL_t]$ , тыс. руб.	$R_T$ , тыс. руб.	$\frac{R_T}{E[AL_t]} \cdot 100\%$
1992	24570	2019	8,2
1996	23727	2020	8,5
2002	23257	2025	8,7

Таблица 1.3

Ожидаемое значение резерва покрытия пенсионных обязательств и риски отклонений при числе участников фонда N=110

Таблица смертности	$E[AL_t]$ , тыс. руб.	$R_T$ , тыс. руб.	$\frac{R_T}{E[AL_t]} \cdot 100\%$
1992	2457	638	26,0
1996	2373	639	27,0
2002	2326	640	27,5

Таблица 1.4

Ожидаемое значение резерва покрытия пенсионных обязательств и риски отклонений при числе участников фонда N=11

Таблица смертности	$E[AL_t]$ , тыс. руб.	$R_T$ , тыс. руб.	$\frac{R_T}{E[AL_t]} \cdot 100\%$
1992	246	202	82,11
1996	237	202	85,23
2002	233	202	86,70

Представленные в таблицах данные показывают, что для фондов (предприятий) с небольшим числом участников 100 и менее человек риск отклонения современной стоимости пожизненных выплат от ожидаемого значения достигает 26% и более. Для таких фондов (предприятий) лучше использовать сберегательные схемы.

Следует отметить, что для фондов численностью более 100 участников отклонения современной стоимости выплат от ожидаемого значения при использовании различных таблиц смертности сопоставимы с риском отклонений вследствие неопределенности продолжительности предстоящей жизни. Поэтому в дальнейшем для оценки минимальной величины страхового резерва используем значения ожидаемой современной стоимости пожизненных выплат для наиболее консервативного варианта – таблиц смертности 1992 года.

Относительная величина риска отклонений современной стоимости пожизненных выплат вследствие неопределенности продолжительности предстоящей жизни зависит также от возраста участников фонда. Данные представлены в таблице 2.

Таблица 2

Зависимость риска отклонений современной стоимости пожизненных выплат для групп участников возраста  $x$  с числом участников  $N_x=1000$

Возраст участников	$E[AL_x]$ , тыс. руб.	$R_x$ , тыс. руб.	$\frac{R_x}{E[AL_x]} \cdot 100\%$
57	32 311	548	1,7
58	31 967	555	1,7
65	27 924	612	2,2
70	23 930	624	2,6
72	22 213	618	2,8
74	20 478	605	3,0
75	19 606	597	3,0
76	18 733	586	3,1
77	17 865	575	3,2
79	16 161	548	3,4
81	14 512	516	3,6

Таким образом, расчетная минимальная величина страхового резерва, необходимая для покрытия неопределенности продолжительности предстоящей жизни участников и доходности к начислению на пенсионные счета при планируемом значении современной стоимости резерва покрытия пенсионных обязательств 240 млн руб., при использовании таблиц смертности городского населения 1992 года и числе участников фонда 11 000 человек, составит

$$SR = R_p + R_T = 6386 + 1800 = 8186 \text{ тыс. руб.},$$

или 3,4%. Поскольку нормативное минимальное значение страхового резерва составляет 5% резерва покрытия пенсионных обязательств, можно считать, что этой величины достаточно для покрытия рисков фонда.

Анализ количественных закономерностей позволяет сделать вывод, что минимальный размер

страхового резерва может колебаться в широких пределах от 0 до 50% резерва покрытия пенсионных резервов. Значение страхового резерва 0 теоретически возможно для гипотетического фонда со сберегательными пенсионными схемами и портфелем пенсионных резервов, размещенных в государственные ценные бумаги с фиксированной доходностью, у которых период вложения совпадает с периодом погашения. Но и для них страховой резерв необходим для стабилизации размера доходности к начислению на пенсионные счета, превышающей уровень инфляции. Таким образом, для реального фонда минимальный размер страхового резерва всегда должен быть больше нуля, т.к. даже в условиях постоянно совершенствующегося законодательства, направленного на минимизацию рисков негосударственных пенсионных фондов, полностью избежать всех рисков невозможно.

Полученные данные показывают, что размер страхового резерва при выполнении сделанных при расчете предположений зависит от:

1) риска отклонения современной стоимости пожизненных выплат от ожидаемого значения вследствие неопределенности предстоящей жизни участников фонда;

2) числа участников фонда;

3) возрастного состава участников;

4) риска отклонения доходности активов фонда к начислению на пенсионные счета от предполагаемого процента инфляции.

Таким образом, определен минимальный размер страхового резерва, обеспечивающего устойчивую и эффективную работу фонда, при условии, что ставка дисконтирования соответствует наиболее вероятному значению процента инфляции за период пожизненных выплат и используются таблицы смертности с наименьшим значением смертности участников. Он равен сумме рисков отклонений современной стоимости пожизненных выплат вследствие неопределенности продолжительности предстоящей жизни участников и доходности к начислению на пенсионные счета от процента инфляции при выполнении допущений об отсутствии других рисков. Очевидно, что в случае, если этими рисками нельзя пренебречь, их также необходимо оценить.

Поэтому при определении минимального размера страхового резерва необходим индивидуальный подход к каждому фонду с анализом присущих ему рисков, учитывающий как типы пенсионных схем, возрастной и количественный состав участников, так и динамику изменения состава инвестиционного портфеля и эффективность работы управляющей компании.

*Автор выражает благодарность участникам совместного семинара кафедр «Теории вероятностей» и «Математического анализа и теории функций» Волгоградского государственного университета за обсуждение данной работы.* ■