

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПЕНСИОННЫХ ВЫПЛАТ

**Решения, принимаемые руководством и специалистами негосударственного пенсионного фонда, должны базироваться на представлении о его деятельности в будущем. При этом важно прогнозировать пенсионные выплаты участникам фонда, особенно на долгосрочную перспективу.**



**Владлен БОНЧИК**

*Начальник Управления актуарного анализа и оценивания НПФ электроэнергетики, кандидат технических наук*

**Екатерина МАКОВА**

*Главный специалист Управления актуарного анализа и оценивания НПФ электроэнергетики*

**Д**ля чего может быть использована информация о прогнозе пенсионных выплат? Прежде всего, для управления портфелем пенсионных резервов. Так, например, желаемая ликвидность портфеля может быть обеспечена облигациями, для расчета их параметров необходимо иметь прогноз пенсионных выплат по годам. Это особенно актуально при отсутствии или небольшом поступлении пенсионных взносов, когда единственным источником выплат является ликвидная часть инвестиционного портфеля фонда.

Приведенного примера, по нашему мнению, вполне достаточно для того, чтобы убедиться в актуальности задачи прогнозирования пенсионных выплат, хотя имеются и другие области применения результатов прогноза.

**Каким образом решается задача прогнозирования** пенсионных выплат НПФ? Для этого необходимо иметь информацию

об участниках фонда и математические модели, с помощью которых проводятся расчеты.

Анализируя информацию в базе данных, участников фонда можно разделить на две группы:

- *пенсионеры*, по которым известна вся необходимая информация для прогнозирования пенсионных выплат (пол, дата рождения, пенсионная схема и размер пенсии);

- *активные участники* – лица, не оформившие пенсию, но имеющие именные пенсионные счета (ИПС). Известны пол и дата рождения, а также состояние счетов. Однако не определены размер будущей пенсии и пенсионная схема по следующим причинам. Во-первых, рассматриваются схемы с установленными взносами, где размер пенсии неизвестен заранее, а определяется состоянием пенсионного счета при ее оформлении. Во-вторых, исследован наиболее сложный для прогнозирования вариант, когда участнику предоставлено право изменять пенсионную схему при оформлении пенсии.

Наряду со счетами активных участников и пенсионеров надо учитывать наличие *солидарных пенсионных счетов* вкладчиков

на этапе накоплений. При этом неизвестно заранее, какие суммы и на счета каких активных участников (пол, дата рождения) будут распределяться средства с солидарных счетов.

Учитывая отсутствие необходимой для прогнозирования информации по активным участникам и солидарным счетам, требуется задание ряда предположений для построения **математических моделей**, которые будут рассмотрены в следующем порядке:

- модель солидарных счетов;
- модель активных участников;
- модель пенсионеров.

При этом *модели взаимосвязаны* между собой. Задавая исходные данные и предположения в модели солидарных счетов, получим результаты расчета, которые будут являться исходными данными для модели участников. В свою очередь, результаты расчета по модели активных участников будут являться исходными данными для модели пенсионеров, по которой в конечном счете и прогнозируются пенсионные выплаты.

Перед тем как перейти к построению математических моде-

лей, отметим, что в статье рассматривается прогнозирование пенсионных выплат при отсутствии пенсионных взносов и расторжения договоров. Тем не менее при необходимости учета этих факторов в представленных ниже моделях задаются дополнительные предположения о доле взносов, поступающих на различные пенсионные счета (солидарные, активных участников и пенсионеров), а также — о возможном расторжении договоров и выплате выкупных сумм.

Рассмотрим **модель солидарных счетов**.

В качестве исходных данных используется информация о состоянии солидарных счетов. *Целью расчета* является прогноз распределения средств с солидарных счетов вкладчиков на ИПС активных участников с учетом возраста и пола.

На наш взгляд, могут быть применены два возможных принципа распределения.

*Первый* принцип — распределение средств с солидарного счета каждого предприятия-вкладчика с учетом обязательств перед своими работниками. У НПФ есть обязательства по сумме на солидарном счете только перед предприятием-вкладчиком, однако у вкладчика могут быть обязательства (зафиксированные во внутренних документах предприятия) перед своими работниками по размеру будущей пенсии. Поэтому вполне разумно сумму на солидарном счете распределить прямо пропорционально этим обязательствам вкладчика и обратно пропорционально времени до наступления пенсионных оснований.

Данный подход достаточно трудоемкий, так как необходимо иметь информацию от каждого вкладчика о работниках предприятия, особенно если в фонде ведется большое количество солидарных счетов разных вкладчиков. Этот принцип может быть использован не только для модели прогнозирования, но и в реальной практике распределе-

ния сумм с солидарных счетов конкретного вкладчика на ИПС работников.

Средства  $D_x$ , выделяемые с солидарного счета предприятия-вкладчика работникам возраста  $X$  в момент распределения, определяются выражением:

$$D_x = S_c \cdot \frac{A_x / T_x^{ost}}{\sum_x A_x / T_x^{ost}},$$

где  $S_c$  — сумма на солидарном счете предприятия-вкладчика в момент распределения;

$A_x$  — суммарные обязательства предприятия-вкладчика перед работниками возраста  $X$  в момент распределения (отдельно для мужчин и женщин);

$T_x^{ost}$  — оставшееся время до получения пенсионных оснований работников возраста  $X$  (отдельно для мужчин и женщин).

Для использования в модели активных участников полученные результаты суммируются по всем предприятиям-вкладчикам с учетом возраста и пола.

*Второй* принцип — распределение суммы средств со всех солидарных счетов предприятий-вкладчиков на ИПС активных участников пропорционально состоянию счетов каждой возрастной группы с учетом пола (на основе информации из базы данных об открытых в фонде ИПС активных участников). При таком подходе косвенно учитывается время до получения пенсионных оснований, так как пенсионные взносы на ИПС активных участников, как правило, поступают с учетом их возраста. При применении такого принципа не нужна информация от предприятий-вкладчиков о работниках.

Средства  $D_x$ , выделяемые со всех солидарных счетов предприятий-вкладчиков на ИПС активных участников возраста  $X$

в момент распределения, определяются выражением:

$$D_x = \sum S_c \cdot \frac{U_x}{\sum_x U_x},$$

где  $U_x$  — остаток на ИПС активных участников возраста  $X$  в момент распределения (отдельно для мужчин и женщин).

Перейдем к **модели активных участников**.

В качестве *исходных данных* используется информация из базы данных (пол, дата рождения, сумма накоплений на именном пенсионном счете) и из модели солидарных счетов (суммы, выделяемые на ИПС активных участников).

*Целью расчета* является прогнозирование сумм, выделяемых участнику в момент оформления пенсии. Эти суммы выделяются одновременно и полностью финансируют (обеспечивают на весь период выплат) пенсии по выбранной пенсионной схеме.

Необходимо задание ряда *предположений*, основывающихся на имеющейся статистической информации фонда:

- доля оформляющих пенсию участников среди всех участников, имеющих пенсионные основания;
- доли участников, выбирающих при оформлении пенсии пожизненную, срочную и т.д. пенсионные схемы.

В статье исследован случай, когда участники могут выбрать пожизненную или срочную пенсионные схемы. В общем случае, используя предложенный ниже подход, могут быть рассмотрены и другие пенсионные схемы.

Для построения модели необходимо активных участников разбить по возрастным группам (мужчины и женщины отдельно) от  $X_{min}$  до  $X_{max}$ , где  $X_{min}$  и  $X_{max}$  соответственно минимальный и максимальный возраст активных участников фонда. Для каждой возрастной

группы имеется сумма остатков по счетам (мужчины и женщины отдельно). Тогда современная стоимость сумм, выделяемых на выплаты будущих пожизненных ( ${}^{t+j}B_{X+j}$ ) и срочных ( ${}^{t+j}C_{X+j}$ ) пенсий участникам возраста  $X+j$  в момент получения пенсионных оснований (в год  $t+j$ ), выражается следующей зависимостью:

$${}^{t+j}B_{X+j} = {}^tS_X \cdot {}_jP_X \cdot k \cdot b, (1)$$

$${}^{t+j}C_{X+j} = {}^tS_X \cdot {}_jP_X \cdot k \cdot c, (2)$$

где  $j$  – число лет до получения пенсионных оснований;

${}^tS_X$  – сумма остатков по счетам активных участников возрастной группы  $X$  в год  $t$ ;

${}_jP_X$  – вероятность в возрасте  $X$  прожить  $j$  лет (с учетом пола);

$k$  – доля активных участников, оформляющих пенсию в каждом возрасте от общего числа активных участников, имеющих пенсионные основания в данном возрасте.

$b, c$  – доля активных участников, оформляющих соответственно пожизненную и срочную пенсию в каждом возрасте от числа всех активных участников, оформляющих пенсию в данном возрасте;

Сумма  ${}^tS_X(1-{}_jP_X)$ , образующаяся на счетах активных участников, не доживших до пенси-

онных оснований, может быть в течение  $j$  лет выплачена наследникам, направлена на пенсионные счета правопреемников или на солидарные счета вкладчиков (в зависимости от пенсионных Правил фонда, применяемых пенсионных схем и заключенных договоров).

Все расчеты по модели и вся исходная информация относятся к году  $t$ . В случае, когда активный участник в год  $t$  имеет пенсионные основания,  $j$  равно нулю.

Как показано выше, не все активные участники оформляют пенсию при получении пенсионных оснований. С помощью несложных математических преобразований можно показать, что современная стоимость сумм, выделяемых таким участникам через  $\lambda$  лет после получения ими пенсионных оснований на фондирование будущих пожизненных ( ${}^{t+j+\lambda}B_{X+j+\lambda}$ ) и срочных ( ${}^{t+j+\lambda}C_{X+j+\lambda}$ ) пенсий, выражается следующей зависимостью:

$${}^{t+j+\lambda}B_{X+j+\lambda} = {}^{t+j}B_{X+j} \cdot {}_{\lambda}P_{X+j} \cdot (1-k)^\lambda, (3)$$

$${}^{t+j+\lambda}C_{X+j+\lambda} = {}^{t+j}C_{X+j} \cdot {}_{\lambda}P_{X+j} \cdot (1-k)^\lambda, (4)$$

где  ${}_{\lambda}P_{X+j}$  – вероятность в возрасте  $X+j$  прожить  $\lambda$  лет (с учетом пола).

Формулы (1)–(4) применяются, разумеется, отдельно для возрастных групп мужчин

и женщин, поскольку мужчины и женщины имеют разный возраст получения пенсионных оснований и разную вероятность в возрасте  $X$  прожить  $j$  лет, а в возрасте  $X+j$  прожить  $\lambda$  лет.

Рассмотрим численный пример по модели активных участников (табл. 1). Исходные данные взяты по мужчинам, находящимся в начальный момент в возрасте от 58 до 63 лет. Возраст получения мужчинами пенсионных оснований принят равным 60 годам. Суммы остатков по счетам в таблице 1 указаны с учетом средств, распределенных с солидарных счетов (из модели солидарных счетов).

Зададимся необходимыми предположениями на основе практики работы НПФ электроэнергетики. Примем, что доля участников  $k$ , оформляющих пенсию в каждом возрасте (и соответственно сумма накоплений на именных пенсионных счетах), составляет 30% от общего числа участников, имеющих пенсионные основания в данном возрасте (от общей суммы накоплений на их счетах). Предположим также, что доли участников, оформляющих пожизненную и срочную пенсии в каждом возрасте, составляют соответственно 20% и 80% от числа всех участников, оформляющих пенсию в данном возрасте.

Таблица 1

Возрастная группа, лет	Сумма остатков по счетам, тыс. руб.	Вероятность дожить от возраста $X$ до $X+1$ лет	Прогноз размера годовых сумм, выделяемых при оформлении пенсии, тыс. руб.						...
			0 год		1 год		2 год		
			пожизненная	срочная	пожизненная	срочная	пожизненная	срочная	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X$	${}^0S_X$	${}^1P_X$	${}^0B_X$	${}^0C_X$	${}^1B_{X+1}$	${}^1C_{X+1}$	${}^2B_{X+2}$	${}^2C_{X+2}$	
58	32 077	0,970644103							
59	54 549	0,968656499							
60	21 637	0,966506937	1 298	5 193	3 170	12 681	1 810	7 238	...
61	5 736	0,964240676	344	1 377	878	3 513	2 145	8 580	...
62	12 816	0,961821667	769	3 076	232	929	593	2 371	...
63	10 788	0,959225869	647	2 589	518	2 071	156	626	...
64	0	0,956502321	...	...	435	1 739	348	1 390	...
65	0	0,953590353	...	...	...	...	291	1 164	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
<b>Итого:</b>				<b>12 235</b>		<b>20 933</b>		<b>21 369</b>	

Примем, что в начальный момент (год проведения расчета)  $t$  равно нулю.

Для примера рассмотрим группу участников, которые в начальный момент (0 год) находятся в 59-летнем возрасте и не имеют пенсионных оснований. При этом  $j$  для данной возрастной группы равно единице. Сумма остатков на их счетах составляет 54 549 тыс. руб.

В 60-летнем возрасте (в году 1) ряду участников этой группы будут выделены суммы на фондирование пенсий. Согласно формулам (1) и (2) современная стоимость сумм, выделяемых в момент получения пенсионных оснований на выплаты пожизненных и срочных пенсий, составит соответственно 3170 тыс. руб. и 12 681 тыс. руб.

Современная стоимость сумм, которые будут выделены другому ряду участников этой группы через год после получения пенсионных оснований ( $\lambda$  равно единице), когда им исполнится 61 год (в году 2), на выплаты пожизненных и срочных пенсий согласно формулам (3) и (4) составит соответственно 2145 тыс. руб. и 8580 тыс. руб.

Рассмотрим **модель пенсионеров** по *пожизненной и срочной* (наследуемой) пенсионным схемам.

В качестве *исходных данных* используется информация о пенсионерах из базы данных (пол, дата рождения, пенсионная схема, размер пенсии), а также информация из модели активных участников (суммы, выделяемые на фондирование пенсий).

*Цель расчета* – прогнозирование пенсионных выплат с учетом ежегодного оформления пенсий активными участниками.

Все пенсионеры разбиваются на группы в зависимости от схемы выплат:

- пожизненные – на возрастные группы от  $X_{min}$  до  $\omega$ , где  $X_{min}$  соответствует минимальному возрасту пожизненных пенсионеров фонда, а  $\omega$  – пре-

дельный возраст таблицы смертности, равный 100 годам;

- срочные – на группы по оставшемуся количеству лет выплат от  $L_{min}$  до  $L_{max}$ , где  $L_{min}$  и  $L_{max}$  соответственно минимальное и максимальное количество лет выплат по данной схеме.

При применении результатов модели активных участников по срочной схеме необходимо итоговые суммы по всем возрастным группам перераспределить по количеству лет выплат  $L$ , то есть

$$\sum_{X=X_{min}}^{X_{max}} {}^t C_X = \sum_{L=L_{min}}^{L_{max}} {}^t C_L.$$

Запишем рекуррентные соотношения для **современной стоимости годовых пенсионных выплат**: пожизненных ( ${}^{t+1}V_{X+1}$ ) и срочных ( ${}^{t+1}V_{L-1}$ ).

$${}^{t+1}V_{X+1} = {}^t V_X \cdot \frac{1+f_t}{1+i_t} \cdot p_X + \frac{{}^{t+1}B_{X+1}}{a_{X+1}}; \quad (5)$$

$${}^{t+1}V_{L-1} = {}^t V_L \cdot \frac{1+f_t}{1+i_t} + \frac{{}^{t+1}C_{L-1}}{a_{L-1}}, \quad (6)$$

где  ${}^t V_X$  – сумма пожизненных пенсий участников возрастной группы  $X$  в год  $t$ ;

${}^t V_L$  – сумма срочных пенсий участников, которым в год  $t$  осталось получать выплаты в течение  $L$  лет;

$f_t$  – ставка индексации пенсии в  $t$ -м году;

$i_t$  – ставка доходности в  $t$ -м году;

${}^t B_X$  – современная стоимость суммы, выделяемой в год  $t$  участникам возраста  $X$  на фондирование будущих пожизненных пенсий (из модели активных участников);

${}^t C_L$  – современная стоимость суммы, выделяемой в год  $t$  участникам на фондирование срочной пенсии в течение  $L$  лет (из модели активных участников);

$a_X$  – аннуитетный коэффициент пожизненной пенсии в возрасте  $X$ ;

$a_L$  – аннуитетный коэффициент срочной пенсии в течение  $L$  лет.

Смысл приведенных формул (5) и (6): современная стоимость выплат в году  $t+1$  равна сумме современной стоимости индексированной выплаты в предыдущем году  $t$  и назначенной пенсии в году  $t+1$ .

При использовании рекуррентных уравнений надо задать (или рассчитать) начальные условия, то есть величину выплаты для пожизненной ( ${}^0 V_X$ ) и срочной ( ${}^0 V_L$ ) схем в начальный год ( $t$  равно нулю).

Эти начальные условия рассчитываются следующим образом:

$${}^0 V_X = {}^0 V_X^{base} + \frac{{}^0 B_X}{a_X}; \quad (7)$$

$${}^0 V_L = {}^0 V_L^{base} + \frac{{}^0 C_L}{a_L}, \quad (8)$$

где  ${}^0 V_X^{base}$  – сумма пожизненных пенсий возрастной группы  $X$  в начальный год (по информации об имеющихся пенсионерах из базы данных);

${}^0 V_L^{base}$  – сумма срочных пенсий участников, которым в начальный год осталось получать выплаты в течение  $L$  лет (по информации об имеющихся пенсионерах из базы данных).

*Прогнозируемые суммарные пенсионные выплаты* фонда в любой год равны:

- по пожизненной схеме – сумме выплат по всем возрастным группам (для мужчин и женщин отдельно);

- по срочной схеме – сумме выплат по всем участникам, получающим пенсию по этой схеме.

Разработанная модель прогнозирования пенсионных выплат дает также возможность прогнозирования **современной стоимости обязательств**, равной сумме современных стоимостей оставшихся выплат:

$${}^t A_X = \sum_{i=0}^{\omega-X} {}^{t+i} V_{X+i};$$

Таблица 2

Возрастная группа, лет	Вероятность дожить от возраста X до X+1 лет	Средняя продолжительность предстоящей жизни в возрасте X, лет	Сумма пожизненных годовых пенсий в начальный год (из базы данных), тыс. руб.	Прогноз размера пожизненных годовых выплат, тыс. руб.			
				0 год	1 год	2 год	...
1	2	3	4	5	6	7	8
X	${}_tP_X$	$e_X$	${}^0V_X^{base}$	${}^0V_X$	${}^1V_{X+1}$	${}^2V_{X+2}$	
60	0,966506937	13,577613	777	873	233	133	
61	0,964240676	13,048128	744	770	911	390	
62	0,961821667	12,532024	1 115	1 176	761	925	
63	0,959225869	12,029468	1 911	1 965	1 175	745	
64	0,956502321	11,540808	0	...	1 922	1 157	
65	0,953590353	11,065635	0	...	...	1 865	
...	...	...	...	...	...	...	...
<b>Итого:</b>				<b>4 790</b>	<b>5 006</b>	<b>5 218</b>	...

Таблица 3

$${}^tA_L = \sum_{i=1}^L {}^{t+i-1}V_{L-i+1},$$

где  ${}^tA_X$  – современная стоимость обязательства в год  $t$  по пожизненной схеме перед участниками возрастной группы  $X$ ;

${}^tA_L$  – современная стоимость обязательств в год  $t$  по срочной схеме перед участниками, которым в год  $t$  осталось получать выплаты в течение  $L$  лет.

Отметим, что в предположении о равенстве индексации и доходности, формулы расчета современной стоимости обязательств перед участниками по пожизненной и срочной схеме в году  $t$  упрощаются:

$${}^tA_X = {}^tV_X \cdot (1 + e_X) + \sum_{j=1}^{\infty - X} {}^{t+j}B_{X+j};$$

$${}^tA_L = {}^tV_L \cdot L + \sum_{j=1}^{L-1} {}^{t+j}C_{L-j}.$$

Рассмотрим численный пример по пожизненной схеме (табл. 2). Примем, что  $a_X = 1 + e_X$ ,  $t_t = i_t$ . В начальный момент (0 год) имеются пожизненные пенсионеры – мужчины в возрасте от 60 до 63 лет.

Рассмотрим группу пожизненных пенсионеров, которые в начальный год находятся в 60-летнем возрасте. Расчет выплат в начальный год (873 тыс. руб.) проведен согласно формуле (7) с учетом размера пенсий из базы данных (777 тыс. руб.) и на-

Оставшееся количество выплат, лет	Сумма срочных годовых пенсий в начальный год (из базы данных), тыс. руб.	Прогноз размера срочных годовых выплат, тыс. руб.			
		0 год	1 год	2 год	...
1	2	3	4	5	6
L	${}^0V_L^{base}$	${}^0V_L$	${}^1V_{L+1}$	${}^2V_{L+2}$	
1	256	256	570	2 578	...
2	570	570	2 578	4 340	...
3	2 578	2 578	4 340	4 301	...
4	4 340	4 340	4 301	4 860	
5	1 854	4 301	4 860		
6	673	673			
<b>Итого:</b>		<b>13 613</b>	<b>17 544</b>	<b>21 247</b>	...

значенных пенсий (значение 1298 тыс. руб. из таблицы 1, деленное на 13, 577613).

Для расчета выплат участникам этой группы, когда им исполнится 61 год (в году 1), согласно формуле (5) надо учесть вероятность прожить один год (значение 873 тыс. руб., умноженное на 0,966506937) и назначенное значение пенсий в году 1 (значение 878 тыс. руб. из таблицы 1, деленное на 13,048128). Полученное значение составит 911 тыс. руб.

Рассмотрим численный пример по срочной схеме (табл. 3). Предположим, что суммы, которые будут выделяться активным участникам при оформлении пенсий, фондируют выплаты в течение пяти лет и  $t_t = i_t$ . В начальный момент (0 год) имеются выплаты пенсий в течение периода от 1 до 6 лет.

Рассмотрим группу пенсионеров, которым в начальный год

осталось получать пенсию в течение 6 лет. Выплаты в начальный год согласно формуле (8) составляют 673 тыс. руб. (по информации о размере пенсий из базы данных).

Для расчета выплат участникам этой группы, когда им останется получать пенсию в течение пяти лет (в году 1), согласно формуле (6) надо учесть назначаемые пенсии в году 1 (итоговое значение 20 933 тыс. руб. из таблицы 1, деленное на 5). Полученное значение составит 4860 тыс. руб.

**В заключение** отметим, что в статье рассмотрены основные подходы к прогнозированию пенсионных выплат НПФ. Авторы надеются, что предложенные методы будут полезны специалистам и руководителям пенсионных фондов для решения поставленных задач и принятия решений в конкретных ситуациях. ■